CHAPITRE III :

INFLUENCE ELECTROSTATIQUE – CONDENSATEURS

L'influence électrostatique se manifeste lorsqu'on amène un corps conducteur chargé au voisinage d'un autre conducteur neutre. Le phénomène d'influence électrostatique joue un rôle d'une très grande importance en électrostatique et permet d'expliquer le fonctionnement des composants appelés condensateurs dont les applications sont innombrables.

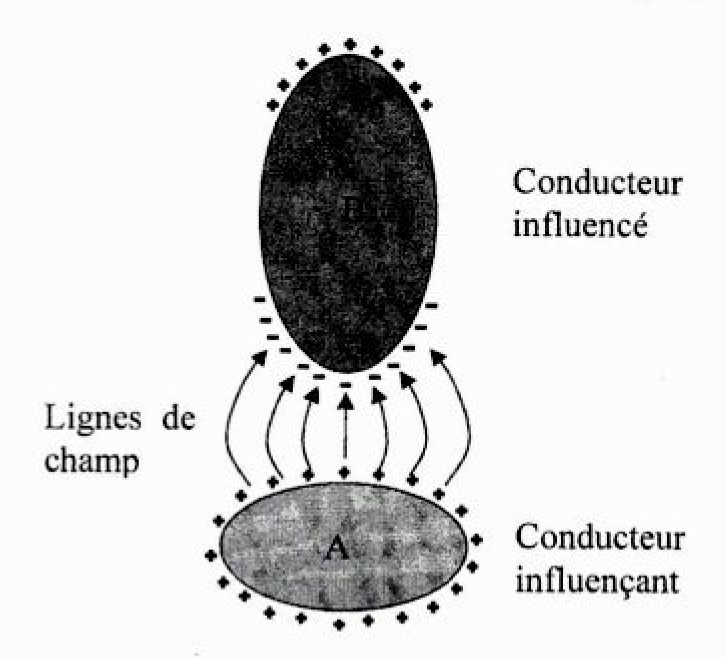
1. INFLUENCE ELECTROSTATIQUE



1.1. Phénomène fondamental

Considérons deux conducteurs isolés A et B, le conducteur B est initialement neutre, le conducteur A porte une charge positive. $q_A > 0$

Lorsqu'on approche le conducteur A de B, on constate dans B l'apparition des charges négatives du côté proche à A et des charges positives du côté éloigné.



En effet A crée un champ $\vec{E}_A$ et les électrons de B se mettent en mouvement vers A. A l'extrémité opposée à A correspond une partie chargée positivement à cause du manque d'électrons.

Les mouvements des charges s'arrêtent lorsque à l'intérieur du conducteur B le champ est nul, on obtient un nouvel état d'équilibre où le conducteur B a été chargé par influence.

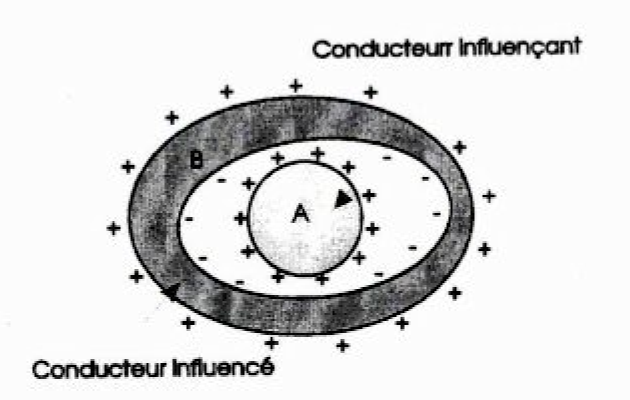
1.2. Influence totale

Dans le cas précédent, les lignes de champ qui partent du conducteur A sont de deux sortes : les unes s'éloignent à l'infini, les autres arrivent sur la plage négative de B. On dit que l'on a influence partielle.

Il y a influence totale lorsque toutes les lignes du champ partant de A aboutissent sur B. Pour cela, il faut que le conducteur influencé entoure complètement le conducteur influençant.

Considérons un conducteur creux B entourant un conducteur A . On amène la charge +Q sur A et on aboutit à un nouvel étant d'équilibre :

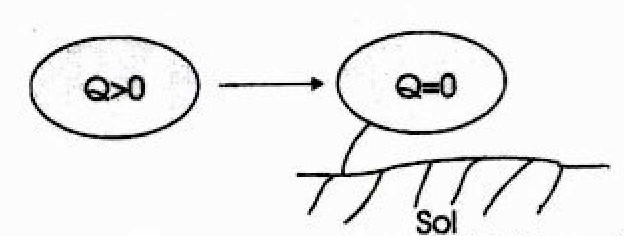
- la face intérieure du conducteur B porte la charge -Q;
- la face extérieure porte la charge +Q.



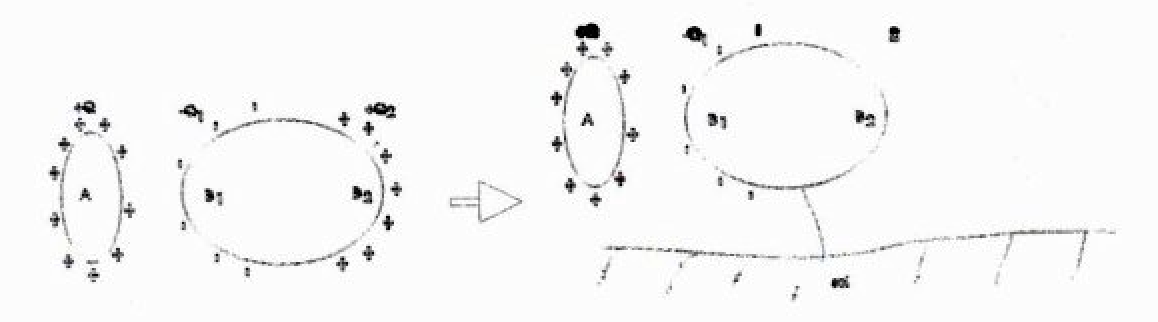
1.3. Rôle du sol

▲Du point de vue électrique, le sol est considéré comme un conducteur de dimensions infinies dont le potentiel en tout point est nul. Le sol est donc un conducteur de capacité infinie.

Considérons un conducteur isolé portant la charge Q, son potentiel est V avec $Q = CV$. Si nous relions ce conducteur au sol par un fil conducteur, son potentiel devient nul et par suite également sa charge.



On utilise aussi le sol pour charger les conducteurs. Considérons un conducteur A influencé par un conducteur B. Si nous relions A au sol par un fil conducteur, nous aboutissons à un nouvel état d'équilibre dans lequel la portion A_1 garde la charge $-Q_1$ tandis que la portion A_2 perd la charge $+Q$. L'utilisation du sol à permis donc de chargé le conducteur A.



En pratique, la notion de mise au sol ou mise à la masse n'a de sens que si l'on introduit dans le sol des conducteurs de grands dimensions : on plonge de longues tiges métalliques dans le sol et on les relie à des bornes de l'installation portant l'indicatif "MASSE" ou "TERRE" ou le symbole :

1.4. Capacités et coefficients d'influence

Considérons un système de conducteur $A_1, A_2, \cdots A_n$ aux potentiels $V_1, V_2, \cdots V_n$, portant les charge $Q_1, Q_2, \cdots Q_n$. Nous pouvons obtenir cet état d'équilibre par superposition d'un certain nombre d'états d'équilibres représentés sur le tableau suivant :

Considérons un premier état d'équilibre dans lequel le conducteur A_1 garde son potentiel, tous les autres conducteurs étant au potentiel zéro.
Dans un deuxième état d'équilibre, c'est le conducteur A_2 que nous porterons au potentiel V_2 tous les autres conducteurs étant au potentiel zéro et ainsi de suite.

Etat 1 :

(1)	$(2)\cdots$	$(i)\cdots$	(n)
Q_{11}	$Q_{21}\cdots$	$Q_{i1}\cdots$	Q_{n1}
V_1	$0\cdots$	$0\cdots$	0

Etat 2 :

(1)	$(2)\cdots$	$(i)\cdots$	(n)
Q_{12}	$Q_{22}\cdots$	$Q_{i2}\cdots$	Q_{n2}
0	$V_2\cdots$	$0\cdots$	0

Etat n :

(1)	$(2)\cdots$	$(i)\cdots$	(n)
Q_{1n}	$Q_{2n}\cdots$	$Q_{in}\cdots$	Q_{nn}
0	$0\cdots$	$0\cdots$	V_n

L'équilibre le plus général résulte de la superposition des n équilibres, et l'on a pour calculer les charges en fonction des potentiels, n équations. Intéressons-nous par exemple au conducteur A_1 :

Dans l'état 1: A_1 est influencé par $A_1 \Rightarrow Q_{11} = C_{11}V_1$
Dans l'état 2: A_1 est influencé par $A_2 \Rightarrow Q_{12} = C_{12}V_2$
$\vdots$
Dans l'état n: A_1 est influencé par $A_n \Rightarrow Q_{1n} = C_{1n}V_n$
Donc, pour le conducteur A_1, l'état d'équilibre global est

$$Q_1 = Q_{11} + Q_{12} + \cdots + Q_{1n}$$
$$V_1 = V_1 + 0 + \cdots + 0$$

qu'on peut écrire sous la forme

$$Q_1 = C_{11}V_1 + C_{12}V_2 + \cdots + C_{1n}V_n$$

soit pour le conducteur i

$$Q_i = C_{i1}V_1 + C_{i2}V_2 + \cdots + C_{in}V_n$$
$$= \sum_{j=1}^{j=n} C_{ij}V_j$$

qui peut se résumer par l'écriture matricielle :

$$[Q] = [C][V]$$

avec

$$[Q] = \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ \vdots \\ Q_n \end{bmatrix} \quad ; \quad [C] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & \cdots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & \cdots & C_{2n} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & \cdots & C_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ C_{n1} & C_{n2} & C_{n3} & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix} \quad ; \quad [V] = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ \vdots \\ V_n \end{bmatrix}$$

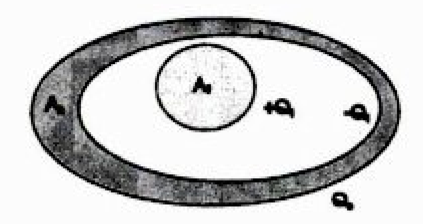
- Les coefficients C_{ii} (pour $i = j$) dont les indices sont identiques sont les **coefficients de capacité** du conducteur A_1 en présence de tous les autres conducteurs, ainsi C_{11} est le coefficient de capacité du conducteur A_1 en présence des autres conducteurs.
- Les coefficients C_{ij} (pour $i \neq j$) dont les indices sont différents sont appelés **coefficients d'influence** du conducteur A_j (influençant) sur le conducteur A_i (influencé).
- on démontre que $C_{ij} = C_{ji}$; $C_{ii} > 0$; $C_{ij} < 0$.

2. LES CONDENSATEURS

المكثفات

2.1. Définition

▲On appelle condensateur le système constitué par deux conducteurs en influence totale (cf. figure).



Les faces en regard de A_1 et A_2 sont les armatures du condensateur. L'armature interne est de charge $+Q$ et l'armature externe est de charge $-Q$.

Nous pouvons écrire :

$$Q_1 = C_{11}V_1 + C_{12}V_2$$
$$Q_2 = C_{21}V_1 + C_{22}V_2$$

$Q_1 = C_1(V_1 - V_2) = C_{11}V_1 - C_{12}V_2$

$Q_2 = C_2(V_1 - V_2) = C_{21}V_1 - C_{22}V_2$

V_1, V_2 sont les potentiels des deux conducteurs;
Q_1, Q_2 sont leurs charges totales (pour l'armature externe A_2, la charge est la somme algébrique de celles des deux faces).

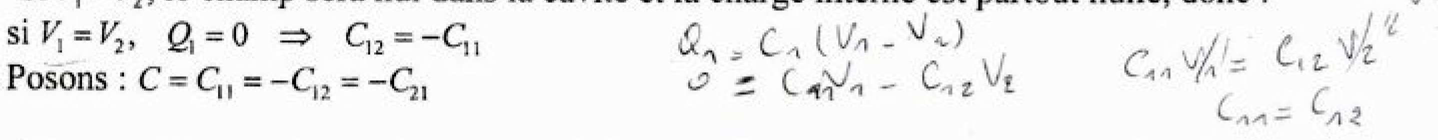
- Si $V_2 = 0$, la charge de la face externe de A_2 est nulle, mais la face interne porte la charge $-Q_1$ due à l'influence totale de la charge Q_1 de A_1.

Donc si $V_2 = 0$, $Q_2 = -Q_1 \Rightarrow C_{21} = -C_{11}$

-Si $V_1 = V_2$, le champ sera nul dans la cavité et la charge interne est partout nulle, donc :

si $V_1 = V_2$, $Q_1 = 0 \Rightarrow C_{12} = -C_{11}$

Posons : $C = C_{11} = -C_{12} = -C_{21}$



▲Le coefficient C est la **capacité du condensateur** et $Q = Q_1$ est la **charge du condensateur** (c'est la charge de l'armature interne). Nous pouvons écrire :

$$Q = C(V_1 - V_2)$$

C'est la relation fondamentale pour les condensateurs.

D'autre part la charge totale du conducteur A_2 est la somme algébrique de celles des deux faces :

$$Q_2 = -Q_1 + Q_e$$

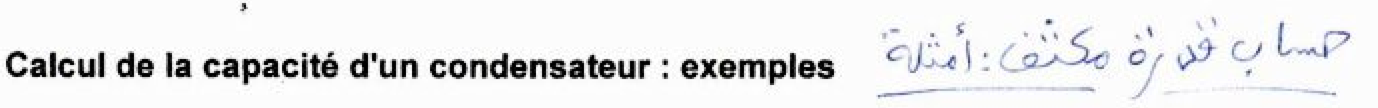
Q_e désigne la charge de la face externe de A_2, la charge de la face interne étant $-Q_1$. Il vient :

$$Q_e = Q_1 + Q_2 = C(V_1 - V_2) - CV_1 + C_{22}V_2$$
$$Q_e = (C_{22} - C)V_2$$

D'où les formules du condensateur :

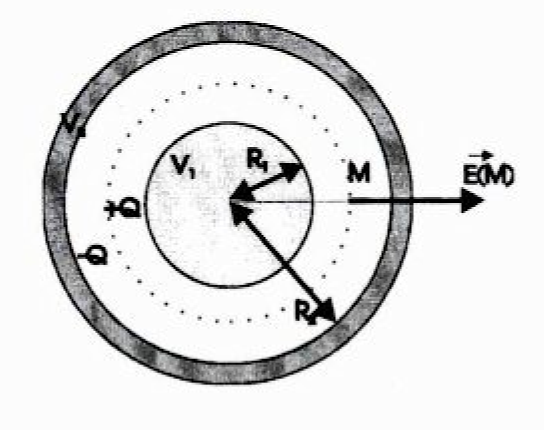
$$\begin{aligned} Q_1 &= Q = C(V_1 - V_2) \\ Q_2 &= -Q + (C_{22} - C)V_2 \end{aligned}$$

2.2. Calcul de la capacité d'un condensateur : exemples



2.2.1. Condensateur sphérique

Considérons deux conducteurs sphériques concentriques de rayon R_1 et R_2. Soit $+Q$ la charge de l'armature interne.



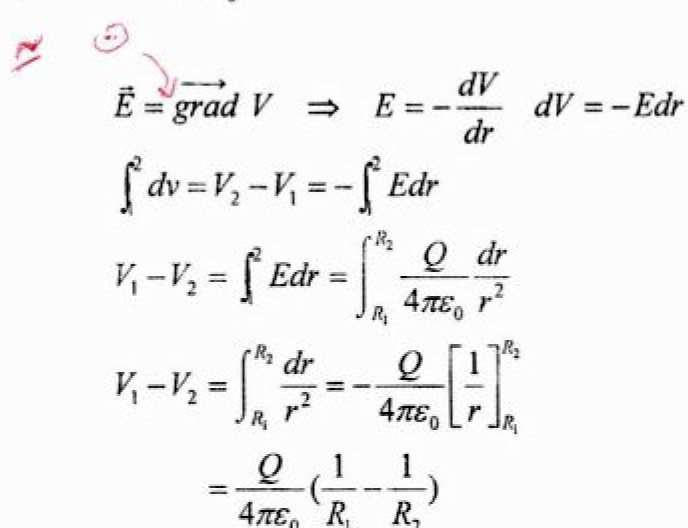
Posons $OM = r$ avec $R_1 < r < R_2$, il vient en appliquant le théorème de Gauss :

$$\Phi = E.S = E \times 4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

car le champ E est radial et de module constant sur la surface de Gauss (sphère de rayon r).
d'où :

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}$$

or



$$\vec{E} = \overrightarrow{grad}\, V \quad \Rightarrow \quad E = -\frac{dV}{dr} \quad dV = -Edr$$

$$\int_1^2 dv = V_2 - V_1 = -\int_1^2 Edr$$

$$V_1 - V_2 = \int_1^2 Edr = \int_{R_1}^{R_2} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dr}{r^2}$$

$$V_1 - V_2 = \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r^2} = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{r}\right]_{R_1}^{R_2}$$

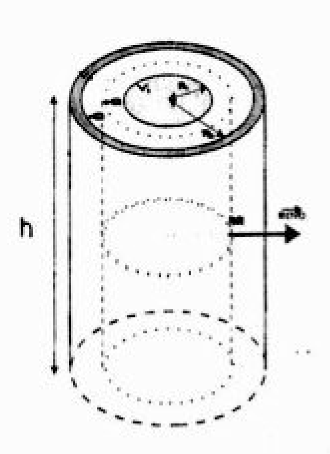
$$= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$$

d'où :

$$C = \frac{Q}{V_1 - V_2} = 4\pi\varepsilon_0 \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}$$

2.2.2. Condensateur cylindrique

Considérons deux conducteurs cylindriques coaxiaux de rayon R_1 et R_2. Soit $+Q$ la charge de l'armature interne.



Pour $OM = r$ avec $R_1 < r < R_2$, le théorème de Gauss donne:

$$\Phi = E.S = E \times 2\pi r h = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

car le champ E est radial et de module constant sur la surface de Gauss (cylindre de rayon r et de hauteur h).
d'où :

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 h}\frac{Q}{r}$$

et

$$V_1 - V_2 = \int_1^2 E dr = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 h}\int_{R_1}^{R_2}\frac{dr}{r}$$
$$= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 h} Log \frac{R_2}{R_1}$$

d'où :

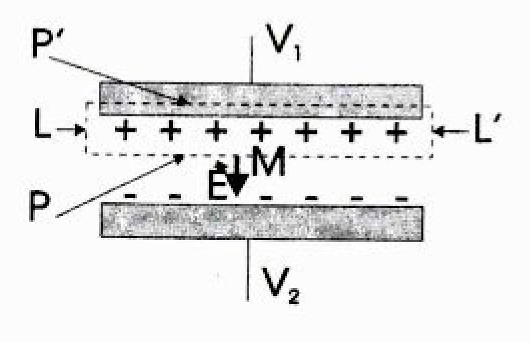
$$C = \frac{Q}{V_1 - V_2} = 2\pi\varepsilon_0 \frac{h}{Log\, R_2/R_1}$$

$C_l = \frac{C}{h}$ est la capacité linéique (capacité par unité de longueur).

2.2.3. Condensateur plan

Considérons deux conducteurs plans parallèles de surface S, distants de e. Les dimensions des armatures sont très grandes devant la ,distance e et nous pouvons considérer qu'il y a influence totale. Entre les deux conducteurs plans, le champ est uniforme.
On constitue une surface fermée (surface de Gauss) avec le plan P, un plan P' parallèle à P et situé à l'intérieur de A_1 et deux surfaces de raccordement L et L'. La charge intérieure à cette surface est Q, et le flux du vecteur champ électrique est

$$\Phi = \Phi_P + \Phi_{P'} + \Phi_L + \Phi_{L'} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$



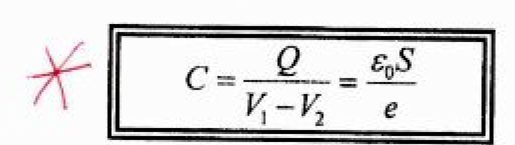
avec :
$\Phi_P = E.S$
$\Phi_{P'} = 0$ (le champ est nul dans l'armature A_1)
Φ_L et $\Phi_{L'}$ sont négligeables devant Φ_P puisque les aires des surfaces L et L' sont négligeables devant S. Il vient:

$$E = \frac{Q}{\varepsilon_0 S}$$

La différence de potentiel se calcule à partir de la relation : $\vec{E} = -\overrightarrow{grad}\,V$.

$$V_1 - V_2 = \int_1^2 E dz = \int_0^e \frac{Q}{\varepsilon_0 S} dz$$
$$= \frac{Q}{\varepsilon_0 S} e$$

d'où :

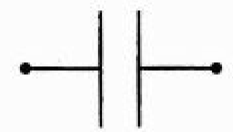


$$C = \frac{Q}{V_1 - V_2} = \frac{\varepsilon_0 S}{e}$$



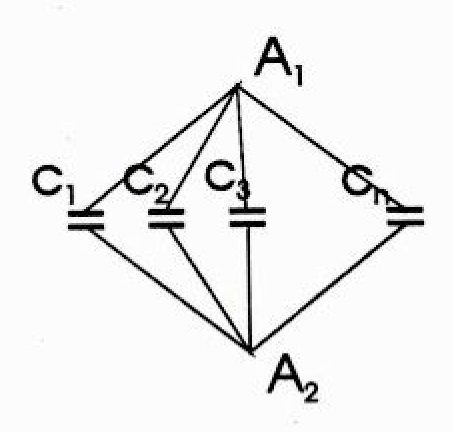
2.3. Association des condensateurs

On représente un condensateur par le schéma suivant :



qu'il soit plan ou non.

2.3.1. Groupement en parallèle



Les armatures des condensateurs sont soumises à la tension

$$V = V_{A1} - V_{A2}$$

ils prennent les charges

$$q_1 = c_1 V \quad ; \quad q_2 = c_2 V \quad ; \quad \cdots \quad ; \quad q_n = c_n V$$

L'ensemble a une charge

$$\begin{aligned} Q &= q_1 + q_2 + \cdots + q_n \\ &= (c_1 + c_2 + \cdots + c_n) V \end{aligned}$$

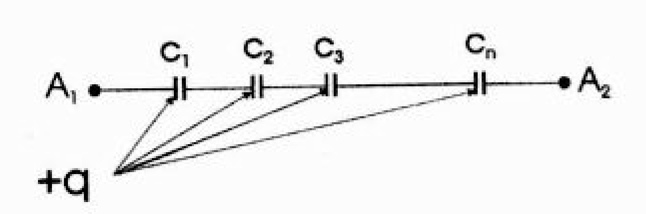
Le condensateur équivalent est donc de capacité :

$$\boxed{C = c_1 + c_2 + \cdots + c_n = \sum_{i=1}^{i=n} c_i}$$

L'intérêt de ce mode de groupement est qu'il permet d'ajouter les capacités.

2.3.2. Groupement en série

Les différences de potentiel aux bornes des condensateurs est :



$$V_1 = \frac{q}{c_1} \quad ; \quad V_2 = \frac{q}{c_2} \quad ; \quad \cdots \quad ; \quad V_n = \frac{q}{c_n}$$

La différence de potentiel aux bornes de l'ensemble est :

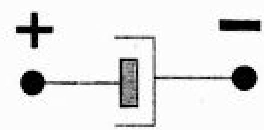
$$\begin{aligned} V &= V_{A1} - V_{A2} = V_1 + V_2 + \cdots + V_n \\ &= q\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \cdots + \frac{1}{C_n}\right) \end{aligned}$$

Le condensateur équivalent est de capacité :

$$\boxed{\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \cdots + \frac{1}{C_n} = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{C_i}}$$

Remarques

a) Il convient de retenir que les règles d'association des condensateurs sont inversées par rapport à celles des résistances.
b) Un condensateur chimique doit obligatoirement être employé sous une d.d.p. de signe donné. Les polarités sont précisées sur les connexions par le schéma suivant:



c) Dans le système M.K.S.A., l'unité de la capacité est le Farad (symbole F). C'est la capacité d'un condensateur qui prend une charge de 1 coulomb pour une différence de potentiel de 1 volt entre ses armatures. Dans la pratique on est amené à utiliser des sous multiples :
le microfarad $=10^{-6}$ Farad (symbole μF)
le nanofarad $=10^{-9}$ Farad (symbole nF)
le picofarad $=10^{-12}$ Farad (symbole pF).

3. ENERGIE ELECTROSTATIQUE

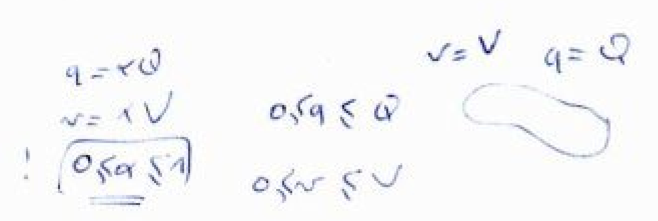
الطاقة الكهروساكنة

3.1. Energie d'un système de conducteurs

On appelle énergie d'un conducteur l'énergie totale que l'on peut récupérer en reliant ce conducteur au sol. C'est aussi l'énergie qu'il faut fournir à ce conducteur pour le charger. Sa charge passe donc de la valeur $q = 0$ à la valeur $q = Q$ et son potentiel de $v = 0$ à $v = V$.
Un état intermédiaire est caractérisé par un nombre α tel que :

$$0 \leq \alpha \leq 1,$$

avec $q = \alpha Q$ et $v = \alpha V$



Supposons que l'opérateur amène un élément de charge dq de l'infini sur le conducteur. Il fournit donc le travail élémentaire :

$$dW = vdq = QV\alpha \, d\alpha$$

Le travail total qui correspond à l'énergie emmagasinée par le conducteur est :

$$W = QV\int_0^1 \alpha \, d\alpha = QV\left[\frac{\alpha^2}{2}\right]_0^1 \text{ soit}$$

$$\boxed{W = \frac{1}{2}QV = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}}$$

$C = \frac{Q}{V}$ étant la capacité du conducteur.

Pour un système de conducteurs

$$\boxed{W = \frac{1}{2}\sum_i Q_i V_i}$$

3.2. Energie d'un condensateur

Un condensateur est un ensemble de deux conducteurs :
le conducteur 1 est de potentiel V_1 et de charge $Q_1 = Q$,
le conducteur 2 est de potentiel V_2 et de charge $Q_2 = -Q + (C_{22} - C)V_2$.
L'énergie totale, c'est-à-dire celle que l'on recueillerait en reliant au sol les deux armatures, est :

$$W = \frac{1}{2}QV_1 + \frac{1}{2}[-Q + (C_{22} - C)V_2]V_2$$

On appelle énergie d'un condensateur chargé, celle que l'on récupère en réunissant les armatures par un conducteur sans changer le potentiel V_2.

▲Avec cette définition, l'énergie d'un condensateur est donc :

$$\boxed{W = \frac{1}{2}Q(V_1 - V_2) = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}}$$

Remarque
Dans le cas d'un condensateur plan

$$C = \frac{\varepsilon_0 S}{e} \quad \text{et} \quad E = \frac{V}{e}$$



et $$W = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{\varepsilon_0 s}{e}\right)\left(e \quad E\right)^2 = \frac{1}{2}\varepsilon_0 seE^2$$

d'où $W = \frac{1}{2}\varepsilon_0 vE^2$; $s.e = v$ $(volume)$ C'est l'énergie nécessaire pour créer un champ électrostatique E à l'intérieur d'un volume v dans le vide.